Resolução comentada Lista 02

Fixação

01. Segundo a lei de formação da matriz:

Temos que $i = j \Rightarrow b_{ij} = 1$, logo $b_{11} = 1$ e $b_{22} = 1$.

Temos que $i < j \Rightarrow b_{ij} = -2ij$, logo $b_{12} = -2 \cdot 1 \cdot 2 = -4$.

Temos que $i > j \Rightarrow b_{ij} = 3j$, logo $b_{21} = 3 \cdot 1 = 3$.

Assim, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det B = 1 + 12 = 13$. Gabarito A.

02.

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{a} \\ \sqrt{b} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3\sqrt{2} - \sqrt{a}\sqrt{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{Multiplicando por 2}$$

$$6\sqrt{2} - 2\sqrt{ab} = \sqrt{2}$$

$$6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{ab}$$

$$5\sqrt{2} = 2\sqrt{ab}$$

$$\left(5\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{ab}\right)^2$$

$$50 = 4ab$$

$$\frac{25}{2} = ab$$

Portanto,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & b & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & b \end{matrix}$$

$$= ab$$

$$= \frac{25}{2}$$

Gabarito A.

Propostos

02. Segundo a lei de formação da matriz temos $a_{ij} = -1 + 2i + j$, logo

$$a_{11} = -1 + 2 \cdot 1 + 1 = 2$$

$$a_{12} = -1 + 2 \cdot 1 + 2 = 3$$

$$a_{21} = -1 + 2 \cdot 2 + 1 = 4$$

$$a_{22} = -1 + 2 \cdot 2 + 2 = 5$$

Portanto, $\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=10-12=-2$. Gabarito D.

04. Gabarito D

$$\begin{vmatrix}2 & x & x\\ -1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=6$$

$$\left|\begin{matrix}2 & x & x\\ -1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}2 & x\\ -1 & -2\\ 3 & 1\end{matrix}=6$$

$$-8-3x-x+6x+2+2x=6$$

$$4x=12$$

$$x=3$$

05. Temos que $A-x\cdot I=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-x\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x & 3\\ 2 & 4-x\end{pmatrix}$. Logo,

$$\det\left(A-x\cdot I\right)=0$$

$$\begin{vmatrix}1-x & 3\\ 2 & 4-x\end{vmatrix}=0$$

$$\left(1-x\right)\cdot\left(4-x\right)-6=0$$

$$4-x-4x+x^2-6=0$$

$$x^2-5x-2=0$$

Vimos no 1° ano as relações de Girard em que numa equação do 2° grau $ax^2+bx+c=0$ a soma das raízes é dada por $-\frac{b}{a}$. Assim para a equação $x^2-5x-2=0$ a soma das raízes é dada por $-\frac{b}{a}=-\frac{\left(-5\right)}{1}=5$. Gabarito A.

10. Temos que c

$A+B\cdot C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot2+0\cdot1\\ 2\cdot1+1\cdot0 & 2\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

Assim, $\det\left(A+B\cdot C\right)=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=5-9=-4$. Gabarito A.

Resolução comentada Lista 03

Capítulo 11 – Páginas 05 e 06

05. O determinante da matriz dada é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{5} & 4 \end{matrix} = -6+0-4+\frac{2}{5}-0+0=-10+\frac{2}{5}=\frac{-50+2}{5}=-\frac{48}{5}$.

Por outro lado usando a propriedade $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det A}$, temos que

$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det A}=\frac{1}{-\frac{48}{5}}=1\cdot\left(-\frac{5}{48}\right)=-\frac{5}{48}$

Gabarito C.

13. Uma matriz não possui inversa quando seu determinante é zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \\ 1 & c \end{matrix} = 0$$

$$27+c+c-9-c^2-3=0$$

$$-c^2+2c+15=0$$

$$c^2-2c-15=0 \quad \text{(Use Bháskara)}$$

$$c=5 \text{ ou } c=-3$$

01. Temos que $\det A=4-6=-2$ e $\det B=0-2=-2$. Pelo teorema de Binet temos que $\det\left(A\cdot B\right)=\det A\cdot\det B=\left(-2\right)\cdot\left(-2\right)=4$.

02. Por ser uma matriz de Vandermond, o seu determinante é dado por $\left(3-2\right)\cdot\left(5-2\right)\cdot\left(5-3\right)\cdot\left(7-2\right)\cdot\left(7-3\right)\cdot\left(7-5\right)=1\cdot3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot2=240$.

03. Calculando o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 14 & 34 \end{bmatrix}$, obtemos pela regra de Sarrus que vale

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 14 \\ 0 & 14 & 34 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 14 \end{matrix} = 204+0+0-0-196-0=8$.

Por outro lado usando a propriedade $\det\left(A^n\right)=\left(\det A\right)^n$, temos que

$$\det\left(A^3\right)=\left(\det A\right)^3$$

$$8=\left(\det A\right)^3$$

$$\det A=2$$